Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

MATEMÁTICA

Professores: Adriano, Andrey, Aurélio e Rodrigo

Comentário Geral

Prova bem abrangente como todos os anos, mas com dois detalhes que chamaram a atenção. Primeiro a ausência de uma questão de trigonometria e outra foi a questão sobre Binômio de Newton, que há muito não era cobrado pela UFPR. No mais, parabéns ao Núcleo de Concursos da UFPR pela prova.
Acompanhe a resolução a partir da próxima página.

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

Questões

01.

Para simular as diversas maneiras pelas quais uma corrente elétrica flui num determinado circuito, é necessário estudar o seguinte sistema linear em função da constante k:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x - y + k^2 z = k + 5 \end{cases}$$

a) Qual a solução do sistema, para k = 0?
b) Discuta o sistema em função do valor k.

Comentário / Resolução:

a)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x - y + 0z = 5 \end{cases}$$

Escalonando o sistema temos:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 + y + 3z = 2 \\ 0 + 0 - 4z = -2 \end{cases}$$

Com isso $z = \frac{1}{2}; y = -\frac{17}{10}; x = \frac{11}{10}$ ou seja o conjunto solução S do sistema será $S = \left\{\left(\frac{11}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

b)

$SPI \Rightarrow DetM \neq 0$, sendo M a matriz dos coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & k^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$k^2 \neq 4$

$k \neq 2$

$k \neq -2$

Para k = 2 e k = -2 o sistema será SPI ou SI Após o escalonamento com k = 2 obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 + 5y + z = -8 \\ 0 + 5y + z = -8 \end{cases}$$

Como as duas equações são iguais devemos eliminar uma delas e com isso o sistema fica com 2 equações e três variáveis e com isso ele terá infinitas soluções (SPI).

Após o escalonamento com k = -2 obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 + 5y + z = -8 \\ 0 + 5y + z = -12 \end{cases}$$

Subtraindo as duas últimas equações obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 + 5y + z = -8 \\ 0 + 0 + 0 = 4 \end{cases}$$

Como zero não pode ser igual a 4 o sistema será impossível (SI)

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

02. A tabela ao lado relaciona a quantidade de espécies de insetos, Q(x), encontradas em uma região de floresta, em função da área x:
Suponha que a quantidade de espécies de insetos possa ser calculada de maneira aproximada por Q(x) = a + b . log(x).
a) Calcule o valor de a e de b.
b) Calcule a área aproximada, em hectares, para a qual se terá 1200 tipos de insetos. (use $\sqrt[3]{10} = 2{,}15$)

x Área (hectares)	10	100	1.000	10.000
Q(x) Tipos de Insetos	500	800	1.100	1.400

Comentário / Resolução:

a)
Substituindo Q(10) = 500 e Q(100) = 800 obtemos as seguintes equações:

$$500 = a + b.\log 10 \qquad 800 = a + b.\log 100$$
$$500 = a + b.1 \qquad 800 = a + b.2$$
$$a + b = 500 \qquad a + 2b = 800$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 500 \\ a + 2b = 800 \end{cases}$ obtemos: a = 200 e b = 300

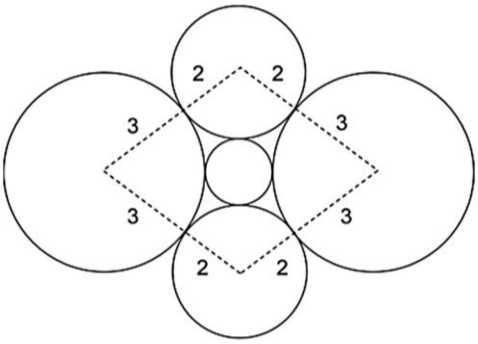
b)
$$Q(x) = 200 + 300.\log x$$
$$1200 = 200 + 300.\log x$$
$$1000 = 300.\log x$$
$$\frac{10}{3} = \log x$$
$$10^{\frac{10}{3}} = x$$
$$x = \sqrt[3]{10^{10}} = \sqrt[3]{10^9.10}$$
$$x = \left(10^3\right).\sqrt[3]{10} = 1000.\left(2{,}15\right)$$
$$x = 2150$$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

03. A figura ao lado apresenta uma configuração envolvendo cinco círculos tangentes. Dois deles possuem raio 3 e dois possuem raio 2.

a) Calcule o raio do círculo menor, justificando sua resposta.

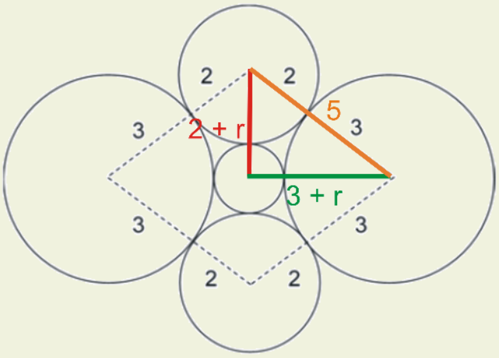
b) Calcule a área do losango, cujos vértices são os centros dos quatro círculos maiores.



Comentário / Resolução:

a)

Na figura temos



$$\left(r+2\right)^2+\left(r+3\right)^2=5^2$$
$$r^2+4r+4+r^2+6r+9-25=0$$
$$2r^2+10r-12=0$$
$$r^2+5r-6=0$$
$r=-6$ (não podemos considerar por r ser uma medida)
$$r=1$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo obtemos:

$$\left(r+2\right)^2+\left(r+3\right)^2=5^2$$
$$r^2+4r+4+r^2+6r+9-25=0$$
$$2r^2+10r-12=0$$
$$r^2+5r-6=0$$
$r=-6$ (não podemos considerar por r ser uma medida)
$$r=1$$

b)

$$S_L=\frac{D.d}{2} \qquad S_L=\frac{8.6}{2} \qquad S_L=24cm^2$$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

04. Suponha que um bloco retangular de madeira possui dimensões n cm, (n + 1) cm e (n + 2) cm, sendo n um número inteiro positivo. O bloco foi pintado na cor vermelha e depois cortado em cubos de aresta 1 cm, por meio de cortes paralelos às faces.

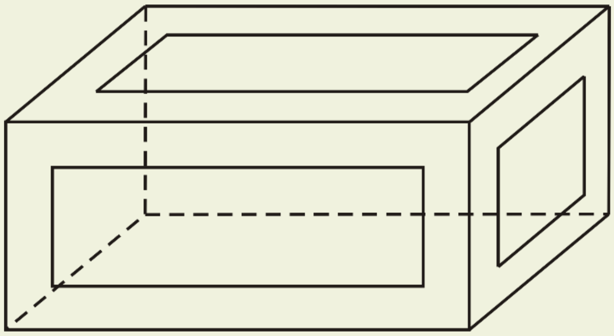
a) Qual deve ser o valor de n para que 22 cubos possuam exatamente uma face vermelha?

b) Qual deve ser o valor de n para que 24 cubos não possuam nenhuma face vermelha?

Comentário / Resolução:

a)

Para os cubos terem uma face pintada deveremos considerar os retângulos representados nas faces da figura a seguir.



Com isso as dimensões dos retângulos destas faces serão n, (n- 1) e (n – 2). Portanto teremos seis áreas a considerar sendo estas iguais duas a duas. Com isso:

$$2.\left[n.(n-1)+n.(n-2)+(n-2).(n-1)\right]=22$$

$$n.(n-1)+n.(n-2)+(n-2).(n-1)=11$$

$$3n^2-6n-9=0$$

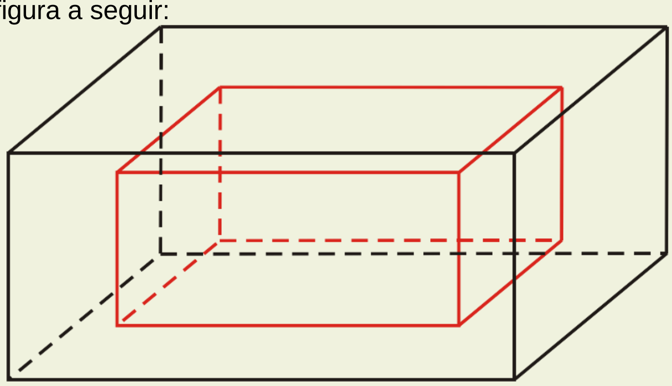
$$n^2-2n-3=0$$

$$n=3$$

$n=-1$ (não podemos considerar por ser uma medida)

b)

Neste caso consideramos a figura a seguir:



Agora temos

$$n.(n-1)(n-2)=24$$

$$n^3-3n^2+2n-24=0$$

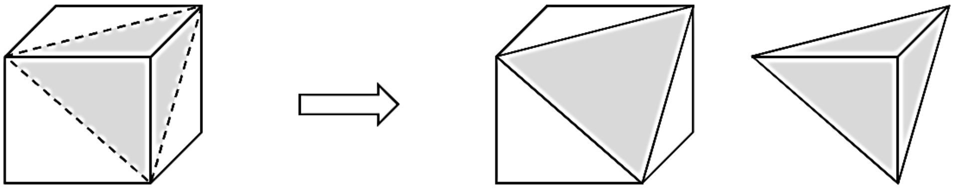
$$n=4$$

(Aplicando o dispositivo de Briot - Ruffini)

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

05. Um cubo de aresta 4 cm foi seccionado por um plano, originando dois sólidos geométricos conforme indica a figura.



a) Calcule o volume de cada um dos dois sólidos obtidos por essa secção.
b) Calcule a área total da superfície de cada um dos sólidos obtidos por essa secção.

Comentário / Resolução:

a)

$$V_C = a^3$$
$$V_C = 4^3$$
$$V_C = 64 \text{ cm}^3$$

$$V_P = \frac{S_B.h}{3}$$
$$V_P = \frac{\frac{4.4}{2}.4}{3}$$
$$V_P = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_S = V_C - V_P$$
$$V_S = \frac{192-32}{3}$$
$$V_S = \frac{160}{3} \text{ cm}^3$$

b)

$$A_P = 3.\frac{\text{b}.h}{2} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_P = 3.\frac{4.4}{2} + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_P = 24 + \frac{32\sqrt{3}}{4}$$
$$A_P = 24 + 8\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

$$A_S = 3.S_Q + 3.S_\Delta + S_{\Delta e}$$
$$A_S = 3.4^2 + 3.\frac{4.4}{2} + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_S = 48 + 24 + 8\sqrt{3}$$
$$A_S = 72 + 8\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

06. A tabela ao lado apresenta a distribuição total de licenças por empregado solicitadas nos últimos 5 anos em uma empresa:
a) Calcule a média, a moda e a mediana da distribuição de licenças por empregado.
b) Calcule a variância e o desvio padrão da distribuição de licenças.

Total de Licenças	3	4	5	6	7	8
Empregados	1	3	6	9	7	4

Comentário / Resolução:

a)
m – média m_o – moda m_d – mediana
Como as frequências são diferentes temos a média ponderada.

$$m = \frac{1.3 + 3.4 + 6.5 + 9.6 + 7.7 + 4.8}{30}$$

$$m = \frac{3 + 12 + 30 + 54 + 49 + 32}{30}$$

$$m = \frac{180}{30}$$

$m = 6$ licenças / empregado

$m_o = 6$ pois a frequência para 6 licenças é nove (maior)

$m_d = 6$ pois como são 30 termos a mediana é calculada por $m_d = \dfrac{a_{15} + a_{16}}{2}$.

Como $a_{15} = 6$ e $a_{16} = 6$ a mediana $m_d = 6$.

b)

$$V = \frac{1.(3-6)^2 + 3.(4-6)^2 + 6.(6-5)^2 + 9.(6-6)^2 + 7.(6-7)^2 + 4.(8-6)^2}{30}$$

$$V = \frac{9 + 3.4 + 6.1 + 9.0 + 7.1 + 4.4}{30}$$

$$V = \frac{9 + 12 + 6 + 0 + 7 + 16}{30}$$

$$V = \frac{50}{30} = \frac{5}{3} \text{ (licença)}^2$$

Como DP=$\sqrt{V}$ temos:

$$\text{DP}=\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \quad (licença)$$

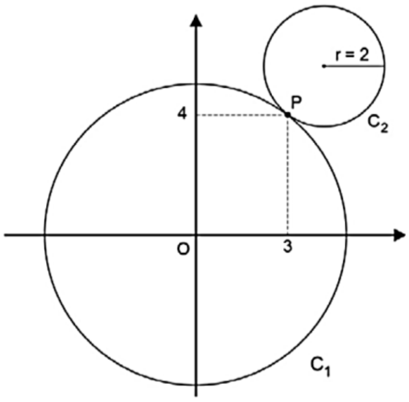
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

07. Considere o círculo C_1, de centro na origem, que passa pelo ponto P(3,4) e o círculo C_2, de raio r = 2, tangente a C_1 no ponto P, conforme a figura ao lado.

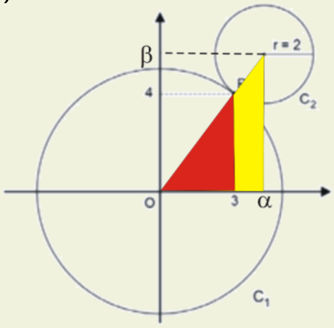
a) Obtenha as equações cartesianas do círculo C_1 e da reta que passa pelo centro de C_1 e pelo ponto P.

b) Obtenha as coordenadas cartesianas do centro do círculo C_2.



Comentário / Resolução:

a) Para calcular o raio de C1 utilizaremos Pitágoras.



$$R^2 = 4^2 + 3^2$$
$$R^2 = 25$$
$$R = 5$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

A equação da reta que passa pela origem e pelo ponto P é:

$$\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3y - 4x = 0 \text{ ou } y = \frac{4x}{3}$$

b) Como o centro de C1, P e o centro de C2 estão alinhados temos uma semelhança entre os triângulos assinalados.

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$\left(x - \frac{3\beta}{4}\right)^2 + (y-\beta)^2 = 2^2$$

Como P pertence à circunferência temos:

$$\left(3 - \frac{3\beta}{4}\right)^2 + (4-\beta)^2 = 4$$

$$25\beta^2 - 200\beta + 336 = 0$$

$$\beta = \frac{28}{5}$$

$\beta = \dfrac{12}{5}$ (não consideramos por ser menor que 4)

Com isso

$$\alpha = \frac{3\beta}{4} = \frac{3}{4}.\frac{28}{5} = \frac{21}{5}$$

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

08.

Considere a expressão $\left(x+\dfrac{1}{2x^3}\right)^n$, em que n é um número inteiro positivo.

a) Se n = 4, qual é o termo independente no desenvolvimento binomial da expressão?
b) Qual deve ser o valor de n para que o termo independente da expressão seja igual a 7?

Comentário / Resolução:

a)
O termo geral do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ seria:

$$T_{p+1}=\binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$

Para n = 4 temos $\left(x+\dfrac{1}{2x^3}\right)^4$

Com isso a = x, $b=\dfrac{1}{2x^3}$ e n = 4

Nestas condições o termo geral do desenvolvimento é:>

$$T_{p+1}=\binom{4}{p}x^{4-p}.\left(\frac{1}{2x^3}\right)^p$$

$$T_{p+1}=\binom{4}{p}x^{4-p}.\frac{(1)^p}{\left(2x^3\right)^p}$$

$$T_{p+1}=\binom{4}{p}x^{4-p}.\frac{1}{2^p.x^{3p}}$$

$$T_{p+1}=\binom{4}{p}.\frac{1}{2^p}x^{4-p-3p}$$

$$T_{p+1}=\binom{4}{p}.\frac{1}{2^p}x^{4-4p}$$

Como no termo independente devemos ter x^0 temos que 4 – 4p = 0 e com isso p = 1.

Portanto o termo independente do desenvolvimento é $T_2=\binom{4}{1}.\dfrac{1}{2}=4.\dfrac{1}{2}=2$

b)
O termo geral do desenvolvimento é $T_{p+1}=\binom{n}{p}.\dfrac{1}{2^p}x^{n-4p}$.

Como o termo independente é igual a 7 temos que

$$7=\binom{4}{p}.\frac{1}{2^p}x^{n-4p}$$

Como o expoente de x deve ser zero temos que n = 4p
Portanto:

$$7=\binom{4p}{p}.\frac{1}{2^p}$$

Para p = 1 temos que $7=\binom{4}{1}.\dfrac{1}{2^1}=2$ (falso)

Para p = 2 temos que $7=\binom{8}{2}.\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{8.7}{2}.\dfrac{1}{4}=7$ (verdadeira)

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

09.

Considere as funções f e g, definidas por $f(x) = c\,x + 1$ e $g(x) = x + c$, sendo c uma constante e $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os valores de c para os quais $f \circ g = g \circ f$.

b) Calcule os valores de c para os quais $g = c\,f^{-1}$, sendo f^{-1} a função inversa de f.

Comentário / Resolução:

a)

$f \circ g = c(x+c)+1$

$f \circ g = cx + c^2 + 1$

$g \circ f = cx + 1 + c$

Com isso

$cx + c^2 + 1 = cx + 1 + c$

$c^2 - c = 0$

$c = 1$

$c = 0$

b)

$f^{-1}(x) = ?$

$f(x) = y$

$y = cx + 1$

Trocando-se x por y e vice versa temos:

$x = cy + 1$

$y = \frac{x-1}{c} \quad (c \neq 0)$

Calculando $g = cf^{-1}$

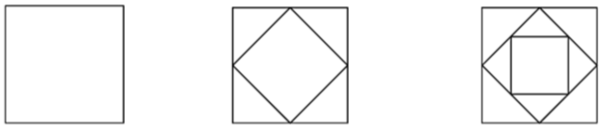
$x + c = c.\left(\frac{x-1}{c}\right)$

$x + c = x - 1$

$c = -1$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

10. Os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados de um quadrado, formam um novo quadrado. A seguir, os pontos médios dos lados do segundo quadrado são unidos para formar um terceiro quadrado. Repetindo esse processo indefinidamente obtém-se uma sequência de quadrados, cada vez menores, conforme ilustram as figuras a seguir.



Suponha que o primeiro quadrado possui lado 1 m:
a) Calcule o comprimento do lado do terceiro quadrado obtido por esse processo.
b) Mostre que a soma dos perímetros de todos os quadrados dessa sequência é aproximadamente 13,6 m.

Comentário / Resolução:

a) Lado do quadrado 1 $\Rightarrow \ell_1 = 1$

Aplicando o teorema de Pitágoras calculamos o lado do quadrado 2.

Lado do quadrado 2 $\Rightarrow \ell_2^2 = \ell_1{}^2 + \ell_1{}^2$

$$\ell_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\ell_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lado do quadrado 3 $\Rightarrow \ell_3^2 = \ell_2{}^2 + \ell_2{}^2$

$$\ell_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\ell_3 = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\ell_3 = \frac{1}{2}$$

b)
A sequência infinita formada pelos perímetros é:

$\left(4, 2\sqrt{2}, 2, ...\right)$

Com isso

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_\infty = \frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{8}{2-\sqrt{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$S_\infty = \frac{8.\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} = 4.\left(2+\sqrt{2}\right) = 4.\left(3,6\right) = 13,64$$