Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

MATEMÁTICA
Professores: Andrey, Cristiano e Julio

Questões

01 - Um método numérico bastante eficiente para se obter o valor aproximado da raiz quadrada de um número $a > 0$ consiste em duas etapas:

Etapa 1: escolher o valor inicial $x_0 > 0$;

Etapa 2: calcular as aproximações seguintes por meio da expressão $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2 \cdot x_n}$, sendo n um número natural.

a) Calcule x_1 e x_2 para $a = 5$ e $x_0 = 2$.

Substituindo os valores dados na fórmula teremos:

$$x_1 = x_{0+1} = \frac{(x_0)^2+a}{2.x_0} = \frac{(2)^2+5}{2.2} = \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad x_2 = x_{1+1} = \frac{(x_1)^2+a}{2.x_1} = \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2+5}{2.\frac{9}{4}} = \frac{161}{72}$$

b) Nas condições do item anterior, verifique que $|(x_2)^2 - 5| < 10^{-3}$.

Substituindo os valores do item anterior na identidade a ser verificada, de fato:

$$\left|\left(\frac{161}{72}\right)^2 - 5\right| = |5,0002 - 5| = |-0,0002| = 0,0002 < 0,001 = 10^{-3}$$

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

02 - O tempo, em milissegundos, gasto por um programa num computador para processar n entradas diferentes de um problema é dado pela expressão

$$T(n) = n^3 + 5 \cdot n + 6.$$

a) Quantas entradas esse programa é capaz de processar no tempo máximo de 1 segundo?

De acordo com o enunciado podemos inferir que:

$$T(n) = n^3 + 5n + 6 \leq 1000$$
$$\leftrightarrow$$
$$n^3 + 5n \leq 994$$
$$\leftrightarrow$$
$$n(n^2 + 5) \leq 994 \quad (1)$$

Como n é inteiro não negativo, podemos conjecturar em (1):
Para n= 0, temos:

$$0(0^2 + 5) = 0 \leq 994 \quad \text{ok}$$

Para n= 1, temos:

$$1(1^2 + 5) = 6 \leq 994 \quad \text{ok}$$

Para n= 2, temos:

$$2(2^2 + 5) = 18 \leq 994 \quad \text{ok}$$
$$\ldots$$

Para n= 9, temos:

$$9(9^2 + 5) = 774 \leq 994 \quad \text{ok}$$

Para n= 10, temos:

$$10(10^2 + 5) = 1050 \geq 994 \ \text{falso}$$

Diante do que foi exposto, podemos afirmar que n = 9

b) Sabe-se que esse programa é composto por dois blocos e que o tempo total de processamento é o produto do tempo de processamento de cada um desses blocos. Se o tempo de processamento de um dos blocos é $P(n) = n + 1$, determine o polinômio $Q(n)$ que fornece o tempo de processamento do outro bloco.

De acordo com o enunciado, podemos inferir que a relação existente entre os polinômios T(n), P(n) e Q(n) será:

T(n)	P(n)
0	Q(n)

$n^3 + 5n + 6$	$n + 1$
0	Q(n)

Aplicando o método da chave podemos obter o polinômio quociente da divisão acima:
$Q(n) = n^2 - n + 6$

OUTRA RESOLUÇÃO:

De

T(n)	P(n)
0	Q(n)

Podemos inferir que:

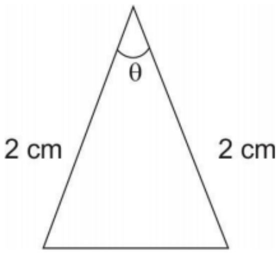
T(n)=(n+1)Q(n)

$$\leftrightarrow$$
$$n^3 + 5n + 6 = (n + 1)Q(n)$$
$$\leftrightarrow$$
$$n^3 + (n^2 - n^2) + (n - n) + 5n + 6 = (n + 1)Q(n)$$
$$\leftrightarrow$$
$$(n^3 + n^2) + (-n^2 - n) + (6n + 6) = (n + 1)Q(n)$$
$$\leftrightarrow$$
$$n^2(n + 1) - n(n + 1) + 6(n + 1) = (n + 1)Q(n)$$
$$\leftrightarrow$$
$$(n + 1)(n^2 - n + 6) = (n + 1)Q(n), \text{ como } n+1 \neq 0$$

$$n^2 - n + 6 = Q(n)$$

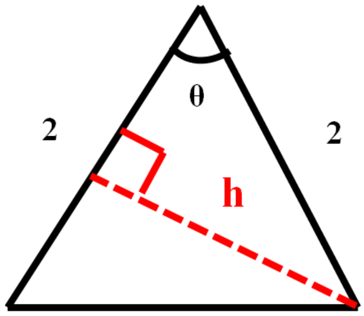
Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

03 - Um triângulo isósceles possui dois lados medindo 2 cm e um ângulo θ entre esses dois lados, conforme indica a figura:



a) Calcule a área desse triângulo para $\theta = 45^\circ$.

Analisando a figura apresentada, podemos acrescentar a altura relativa a base de medida igual a 2, denotada por h:



Daí segue que:

$$\sin(\theta) = \frac{h}{2}$$
$$\leftrightarrow$$
$$2.\sin(\theta) = h \quad \text{(1)}$$

Por outro lado, a área do triângulo de base igual a 2 e altura h será:

$$\frac{2.h}{2} = h \quad \text{(2)}$$

Substituindo (1) em (2), teremos então que a área S_Δ do triângulo será:

$$S_\Delta = 2.\sin(\theta) \text{ onde } \theta \in (0, \pi) \quad \text{(3)}$$

a) Fazendo θ = 45^0 em (3), teremos o que se pede:

$$S_\Delta = 2.\sin(45^o) = \sqrt{2}\ cm^2$$

b) Para qual ângulo θ a área do triângulo é máxima? Justifique sua resposta. (Sugestão: escreva a base e a altura do triângulo em função de $\frac{\theta}{2}$ e use a relação $2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{sen}\,\theta$.)

De acordo com (3), teremos a área máxima quando o seno de θ também for máximo, ou seja, quando $\sin(\theta) = 1$. Como $\theta \in (0, \pi)$, então o referido triângulo terá sua maior área quando $\theta = \frac{\pi}{2}$

04 - Considere a circunferência $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ e a reta $r: y = 2x + 1$, sendo k uma constante.

a) Calcule as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência C.

Seja $C(\alpha, \beta)$ as coordenadas do centro da circunferência e R seu raio.

$$\alpha = \frac{\text{coeficiente de x}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$
$$\beta = \frac{\text{coeficiente de y}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ **onde γ = termo independente da equação**

$$R^2 = 4 + 9 + 12 = 25$$

Logo R = 5

b) Calcule as coordenadas dos pontos de intersecção entre a circunferência C e a reta r.

As coordenadas do ponto de intersecção entre a reta e a circunferência, será determinado através do sistema de equações entre elas, ou seja:

$$\begin{cases} c: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \\ r: y = 2x + 1 \end{cases}$$

Substituindo y por 2x + 1 temos:

$$x^2 + (2x+1)^2 - 4x - 6(2x+1) - 12 = 0$$

Desenvolvendo os termos obtemos a seguinte equação:

$$5x^2 - 12x - 17 = 0$$

Calculando as raízes da equação:

X' = 3,4 e x'' = -1

Portanto os pontos de intersecção entre elas será:

$$(-1, -1) \text{ e } \left(\frac{17}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

Comentário: Acreditamos que devido ao tempo da prova a comissão optou por uma questão mais simplificada de Geometria Analítica, tratando de pontos básicos do assunto, tais como: encontrar centro e raio e um sistema entre a circunferência e uma reta.

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

05 - Num experimento agrícola envolvendo o plantio de um determinado cereal, observou-se que o número de sacas produzidas por hectare depende da quantidade de sementes plantadas. A tabela ao lado descreve alguns dados coletados nesse experimento:

Sacos de semente plantada (t)	Sacas de cereal colhidas (N)
3	70
4	85
5	80

Suponha que a relação entre N e t possa ser escrita como uma função da forma:

$$N = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$$

a) Calcule os coeficientes a, b e c na expressão de N.

b) Para qual valor t o número de sacas N será máximo?

a) Substituindo os valores disponíveis de N e t na expressão supracitada, temos:

$$\begin{cases} 70 = a.3^2 + b.3 + c \\ 85 = a.4^2 + b.4 + c \\ 80 = a.5^2 + b.5 + c \end{cases}$$

Resolvendo as contas indicadas e organizando o sistema como um todo, temos:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 70 \\ 16a + 4b + c = 85 \\ 25a + 5b + c = 80 \end{cases}$$

Qualquer método de resolução é aqui indicado. Optando-se pelo método da adição, multiplica-se a 1ª equação por -1 e soma-se o resultado na 2ª e 3ª equações, temos:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 70 \\ 7a + b = 15 \\ 16a + 2b = 10 \end{cases}$$

Novamente pelo método da adição, multiplica-se a 2ª equação por -2 e soma-se a 3ª, temos:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 70 \\ 7a + b = 15 \\ 2a = -20 \end{cases}$$

logo: $a = -10$

Voltando com o valor de a nas equações acima, teremos:

$$b = 85$$
$$c = -95$$

b) Com os valores de a,b e c determinados no item anterior, teremos a equação completa do segundo grau:

$$N(t) = -10t^2 + 85t - 95$$

onde seu valor máximo é representado pelo vértice da função, no caso deste item a abscissa, representada pelo número de sacas plantadas (t) na expressão.

$$t = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-85}{2.(-10)}$$

$$t = 4,25$$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

06 - Um modelo matemático prevê que o custo c(x), em reais, para se produzir x unidades de um produto é dado pela expressão:

$$c(x) = \sqrt{0,25 \cdot x + 1,5}$$

a) Calcule o número de unidades que podem ser produzidas ao custo de R$ 10,00.

b) Esse modelo fornece dados muito próximos da realidade quando $3 \leq c(x) \leq 12$. Calcule os valores de x para que essa desigualdade seja satisfeita.

a) Substituindo o valor do custo c(x) por 10 reais, temos:

$$\mathbf{10 = \sqrt{0,25x + 1,5}}$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado e simplificando a equação, determinamos o número de unidades x procurado:

$$\mathbf{100 = 0,25x + 1,5}$$

$$\mathbf{98,5 = 0,25x}$$

$$\boldsymbol{x = 394\ unidade}$$

b)

$$\mathbf{3 \leq \sqrt{0,25x + 1,5} \leq 12}$$

Observe que os termos envolvidos são todos positivos.
Podemos elevar ao quadrado todas as parcelas da inequação e simplificar o resultado:

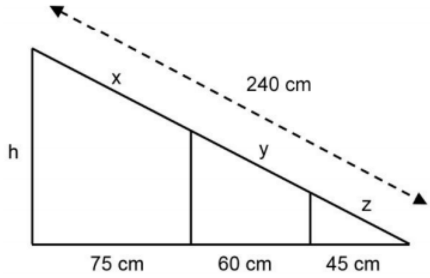
$$\mathbf{9 \leq 0,25x + 1,5 \leq 144}$$

$$\mathbf{7,5 \leq 0,25x \leq 142,5}$$

$$\mathbf{30 \leq x \leq 570}$$

Logo os valores de x que satisfazem esta desigualdade são todos os números naturais de 30 a 570, incluindo o 30 e o 570.

07 - O projeto de uma escadaria prevê o uso de três postes verticais paralelos para sustentar uma armação. Os postes foram espaçados paralelamente ao longo da base da estrutura, como indicado na figura ao lado:



a) Calcule a altura h.

b) Calcule as distâncias x, y e z.

a) Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$240^2 = h^2 + 180^2 \quad \text{concluimos que } h = 60\sqrt{7}\text{ cm}$$

Note que, para facilitar os cálculos, poderíamos ter simplificado cada lado por 10.

$$24^2 = k^2 + 18^2$$

$$24^2 - 18^2 = (24 + 18).(24 - 18) = 42x6 = 252 = 6\sqrt{7}$$

$$\text{Assim, na resposta, deveríamos apenas multiplicar o valor por 10, encontrando } 60\sqrt{7}\text{ cm}$$

b) Utilizando o teorema de Tales, encontramos:

$$\frac{x}{75} = \frac{y}{60} = \frac{z}{45} = \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

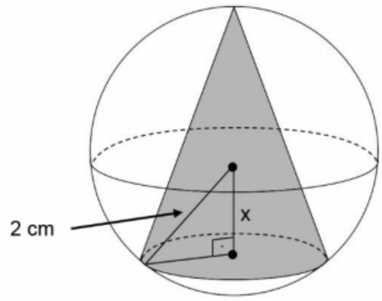
Efetuando o produto dois a dois, encontramos:
X = 100 cm
Y = 80 cm
Z = 60 cm

Comentário: Uma questão de aplicação direta do teorema de Tales, exigindo do aluno conhecimentos básicos de razão e proporção associada ao teorema.

Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880

www.cursodominio.com.br

08 - Um cone circular reto está inscrito em uma esfera de raio 2 cm. Indiquemos por x a distância do centro da esfera ao centro da base do cone.



a) Se x = 1 cm, calcule o volume do cone.

b) Calcule o valor de x, sabendo que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone.

a) Com base no desenho dado podemos deduzir que a altura do cone (h) será igual ao raio da esfera (2 cm) mais o valor x indicado.
Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$2^2 = x^2 + (R)^2$$

Como o enunciado pede para x = 1 cm, temos:

$$4 = 1 + R^2$$

$$R = \sqrt{3}$$

Portanto o volume do cone será:

$$V_{cone} = \frac{\pi . R^2 . H}{3} = \frac{\pi . 3 . 3}{3} = 3\pi \text{ cm}^3$$

b) Para que o volume da esfera seja igual a 4 x o volume do cone devemos ter:

$$V_{esfera} = 4.(V_{cone})$$

$$\frac{4\pi . R^3}{3} = 4 . \frac{\pi . R'^2 . h}{3}$$

Como o raio da esfera vale 2 cm e o raio do cone pode ser escrito como $R = \sqrt{4 - x^2}$

Ficamos com:

$$2^3 = (4 - x^2).(2 + x)$$

O produto acima resulta na equação:

$$x^3 + 2x - 4x = 0$$

A única raiz que satisfaz a condição será: $x = (\sqrt{5} - 1)$ cm

Comentário: Uma questão própria para uma prova discursiva, bem elaborada e com a exigência que se espera da UFPR. Abordando conhecimentos mais aprofundados do candidato.

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

09 - **A passagem de um determinado sistema físico, de uma configuração para outra, pode ser descrita por meio de uma matriz. Suponha que a matriz S, abaixo, represente a passagem da configuração 1 para a configuração 2 desse sistema, sendo α um número real:**

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Para quais valores de α o determinante da matriz acima é igual a zero?

b) Se $\alpha = 0$, calcule a matriz inversa S^{-1}, que representa a passagem da configuração 2 para a configuração 1 desse sistema.

a) Calculando pela regra de Sarrus, teremos:

$$\mathbf{0 + 0 - \propto + 1 - 0 - 0 = 0}$$

$$\mathbf{\propto = 1}$$

b) Para $\propto = 0$, o determinante da Matriz S é igual a 1 (utilizando o método de Sarrus)

A matriz de cofatores da Matriz S será: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A transposta da matriz de cofatores da Matriz S será: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dividindo cada elemento da transposta da matriz de cofatores pelo determinante da Matriz S (detS=1), teremos a Matriz Inversa de S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Domínio
CURSO PRÉ VESTIBULAR
Rua São Francisco, 308
Largo da Ordem I Curitiba I PR
Tel.: 41 3222 7979 I 41 3023 4880
Fax: 41 3023 4880
www.cursodominio.com.br

10 - O jogo de "par ou ímpar" é uma forma bastante usada para resolver aleatoriamente um impasse entre duas pessoas. Cada participante escolhe uma das opções – par ou ímpar – e a seguir ambos mostram as mãos, escondendo ou não alguns dedos. Contam-se os dedos aparentes e vence quem tiver acertado a escolha (par ou ímpar) acordada previamente.

Se duas pessoas jogarem par ou ímpar 5 vezes seguidas:

a) Qual a probabilidade de se obterem no máximo 2 resultados pares?

a) As opções existentes são as seguintes:

1ª opção	PAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR
2ª opção	PAR	PAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR
3ª opção	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR

Note que o enunciado pede "no máximo" 2 resultados pares, portanto podemos ter uma possibilidade somente com resultados ímpares.
Para cada possibilidade devemos considerar sua permutação com as devidas repetições de seus elementos.
1ª opção: $\mathbf{P_5^4 = 5}$
2ª opção: $\mathbf{P_5^{2,3} = 10}$
3ª opção: $\mathbf{P_5^5 = 1}$
Como a probabilidade de ser par será a mesma de ser ímpar, ficamos com:
1ª opção = 2ª opção = 3ª opção = $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
Portanto, para cada um dos eventos, temos:

$$5.\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10.\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 1.\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{16}{32} = 50\%$$

b) Sabendo que na primeira rodada saiu um número par, qual é a probabilidade de ocorrerem exatamente 3 resultados pares?

Sabemos que a primeira rodada "saiu" um número par, então podemos concluir que:

PAR	PAR	PAR	ÍMPAR	ÍMPAR

Como Queremos exatamente 3 resultados pares e já temos a certeza do primeiro ser par, concluímos que nos demais resultados devemos ter apenas 2 resultados pares.

$$P_4^{2,2}.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6.\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Comentário: Uma excelente questão de probabilidade exigia do aluno conhecimentos básicos de permutação com objetos repetidos e noções elementares de probabilidade.